IX Restriktion, Korestriktion & die McIver-Neumann-Schranke

§1. Restriktion & Korestriktion

G Gruppe (endl.)

$|$

$H \leq G$ Index k

M $\mathbb{Z}G$-Modul

$$M \times G \longrightarrow M$$

$\rightsquigarrow$ M ist auch $\mathbb{Z}H$-Modul.

$\rightsquigarrow$ Was passiert auf der Ebene der Kohomologie?

$$\longrightarrow X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

$$X_n \to M, \quad X_{n-1} \to M$$

(freie Aufl. des trivialen $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$) ist automatisch

— " — $\mathbb{Z}H$-Moduls $\mathbb{Z}$. (UE)

$$\boxed{H^n(G, M) = \ker d_{n+1}^* / \operatorname{img} d_n^*}$$

(Erinnerung)

$$d_n^* : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_{n-1}, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_n, M)$$

$$f \longmapsto f \circ d_n$$

„Vergessen" der $\mathbb{Z}G$-Modul-Struktur (bis auf $\mathbb{Z}H$-Modul-Struktur)
liefert

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_n, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X_n, M)$$
$$f \longmapsto f$$

$\rightsquigarrow$ Diese Abb. ist verträglich mit der Quotientenbildung, d.h.

$$\rho^* : H^n(G, M) \longrightarrow H^n(H, M)$$ „<u>Restriktion</u>".

Jetzt andersrum:

$$\tau : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X_n, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_n, M)$$

$$f \longmapsto \underset{\substack{\uparrow \\ X_n}}{x} \longmapsto \sum_{i=1}^{k} t_i^{-1} f(t_i x)$$

für ein Repr.-System von H in G $\{t_1, \ldots, t_k\}$

<u>Beh.</u>: (nicht trivial)

- Unabh. von Repr. System
- Verträglich mit der Quotientenbildung.

$\rightsquigarrow$ $\tau^*: H^n(H, M) \longrightarrow H^n(G, M)$ „<u>Korestriktion</u>".

<u>Satz</u> (Gaschütz & Eckmann) $H \leq G$ Index k

$$\forall\ \hat{f} \in H^n(G, M)$$

$$\tau^*(\rho^* \hat{f}) = k \cdot \hat{f}.$$

$\square$: $\hat{f} = f^{\in \ker d_{n+1}^*} + \operatorname{img} d_n^*$. Nach Verträglichkeit:

$$\tau^* \rho^* \hat{f} = \boxed{\tau \rho f} + \operatorname{img} d_n^*.$$

$$\forall\ x \in X_n : \quad (\tau(\rho f))(x) = \sum_{i=1}^{k} t_i^{-1} \cancel{\rho} \overbrace{f(\underset{\substack{\uparrow \\ G}}{t_i} \cdot x)}^{= t_i f(x)} \qquad f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X_n, M)$$

$$= k \cdot f(x)$$

$\square$

<u>Korollar</u> P eine Sylow-p-UG von G. Dann ist

$$H^n(G,M)_{(p)} = \{ \hat{f} \in H^n(G,M) \mid \text{von } p\text{-Potenz-Ordnung} \}$$

ist isomorph zu einer UG von $H^n(P,M)$.

D • P Sylow-UG $\quad ggT(p, [G:P]) = 1$.

Satz: $\forall\ \hat{f} \in \ker \rho^* \text{ gilt } [G:P]\hat{f} = 0$

$\rightarrow$ $\ker \rho^*$ kein nicht-triviales Element von Ord. p hat.

$\rightarrow$ $H^n(G,M)_{(p)} \xhookrightarrow{\rho^*} H(P,M)$.

injektiv.

$\boxtimes$

§ 2. Die Schranke von McIver und Neumann

Def Eine Gruppe G heißt *A-Gruppe*, wenn alle nilpotenten UG von G abelsch sind.

Fakt: G A-Gruppe $\Longleftrightarrow$ Alle Sylow-UG von G abelsch sind.

Def: Eine Gruppe heißt *auflösbar*, wenn sie eine Subnormalreihe mit abelschen Faktoren besitzt.

Fakten:

- Untergruppen und Quotienten von $\left.\begin{array}{l}\text{A-Gruppen} \\ \text{aufl. Gruppen}\end{array}\right\}$ sind wieder $\left\{\begin{array}{l}\text{A-Gruppen} \\ \text{aufl.}\end{array}\right.$.

- Sei M ein minimaler NT einer auflösbaren Gruppe. Dann ist M elementar abelsche p-Gruppe.

Satz (McIver, Neumann) Sei $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ Primfaktorzerlegung, $\lambda = \lambda(n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

$$f_{A,\text{auf}}(n) := \#\ \underbrace{\text{auf.}}_{\text{kann man weglassen}}\ \text{A-Gruppen von Ord } n \leq n^{\lambda+1}$$

$\square$: Sei G eine aufl. A-Gr. von Ordn. n.

$M \trianglelefteq G$ ein minimaler NT.

G aufl. $\longrightarrow$ $\boxed{M \cong \mathbb{F}_p^{\alpha}}$ $\quad$ OBdA $p = p_1$, $\alpha \leq \alpha_1$

Setze $H = G/M$. Da M NT minimal ist, ist M ein $\mathbb{F}_p H$-Modul als $\mathbb{F}_p H$-Modul einfach.

D.h. G ist festgelegt durch folgendes Datum:

- $q = p^{\alpha}$ Primpotenz $q \mid n$.
- H aufl. A-Gruppe der Ord. n/q
- M einfacher $\mathbb{F}_p H$-Modul der Ordn. q ?
- Eine Koho.-Klasse s.d. die Erweiterung eine A-Gruppe ist

Idee: Alle diese Zahlen beschränken.

Gegeben q. Nach $\overline{\underline{IV}}$ haben wir

$$f_{A,\text{auf}}(n/q) \leq (n/q)^{\lambda(n/q)+1} = (n/q)^{\lambda(n)-\alpha+1}$$

Möglichkeiten für H.

Gegeben H: Es gibt höchstens $|H|$ einfache $\mathbb{F}_p H$-Moduln.

- Einfache Moduln sind zyklisch.
- $\mathbb{F}_p H \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow M$

  freier $\mathbb{F}_p H$-Modul von Rang 1
- Jordan-Hölder: $\mathbb{F}_p H$ höchstens $\dim_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_p H = |H|$ verschiedene K-Faktoren

⇝ Ist H gewählt, hat man $|H| = n/q$ Möglichkeiten für M.

<u>Gegeben M, H, q:</u> Suche Koh.-Klassen, s.d. die assoziierte Erweiterung

$$M \to G \to H$$

eine A-Gruppe ist. Menge dieser $\boxed{H^2_A(H,M)}$.

- Sei Q eine Sylow-p-UG von H. Dann muß Q M zentralisieren, sonst ist $H^2_A(H,M) = \emptyset$. (warum?)

$$M \to G \to H$$

P ⊆ A-Gruppe Q p

- Eine Klasse $f + B^2(H,M) \in H^2(H,M)$ entspricht einer abelschen Erweiterung, wenn $f(g,h) = f(h,g)\ \forall h, g$ ist.

⇝ <u>Fakt</u>: $f + B^2(H,M) \in H^2_A(H,M)$, wenn für jede Sylow-UG P $f(g,h) = f(h,g)$ $h,g \in P$

Sei $X^* : \to X_n \longrightarrow X_{n-1} \to \dots \longrightarrow X_1 \to \mathbb{Z} \to 0$

die Standard-Bar-Auflösung des trivialen $\mathbb{Z}H$-Moduls $\mathbb{Z}$.

Dann ist

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}H}(X_n, M)$

- endlich, da X_n endl. erz. und M endlich ist.
- abelsch, da M abelsch ist.
- von Exponent p, da M von Exp p ist.

$\rightsquigarrow$ Der Quotient $H^2(H, M)$ eine endliche p-Gruppe.

Betrachte: $\rho^* : H^2_A(H, M) \longrightarrow H^2_A(Q, M)$.

$\uparrow$ Sylow-p-Ug H

Nach Keroller ist dies injektiv. Nach unserer Bedingung, eine A-Gruppe zu beschreiben, gilt

$$|H^2_A(H,M)| \leq \underbrace{|H^2_A(Q,M)|}_{\hat{=}\ \{\text{Menge aller abelschen Erweiterung von } M \text{ nach } Q\}} \leq q^{\alpha_1 - \alpha}$$

Warum?

Präsentierung als abelsche Gruppe: $Q = \langle x_1, \dots, x_d \mid x_1^{m_1} = x_2^{m_2} = \dots = x_d^{m_d} = 1 \rangle$

Präsentierung der Erweiterung $\langle y_1, \dots y_d, M \mid y_1^{m_1} = z_1 \in M, \dots, y_d^{m_d} = z_d \in M \rangle$

⇝ $|M|$ Möglichkeiten für jedes z_i

⇝ $|H_A^L(Q,M)| \le |M|^d \le q^{\alpha_1 - \alpha} \le \boxed{q^{\lambda-\alpha}}$

⇝ Alles zusammensetzen:

$$f_{A,auf}(n) \le \overset{q}{\sum_{p^\alpha = q \mid n}} \overset{H}{f_{A,auf}(n/q)}\ \overset{M}{(n/q)}\ \overset{\text{Erweiterung}}{q^{\lambda-\alpha}}$$

q Primpotenz

$$\le \sum_q (n/q)^{\lambda-\alpha+2} q^{\lambda-\alpha} \le n^{\lambda+1} \sum_q \left(\frac{1}{q}\right)^2$$

$$< \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) n^{\lambda+1} < \boxed{n^{\lambda+1}}$$

TADA

D